

$$V(T) \geq \frac{(\psi'(\alpha))}{I_L}$$

مراجعة تمارين

تكون  $T$  هو المتغير  
للحالة  $\alpha$  والتالي:

البيانات: لدينا بالفترة  $ET = \psi(\alpha)$

$$\int_{R_n} t L dx = \psi(\alpha) \quad \dots (1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1) بالنسبة  $\alpha$  وحسب:

$$\int_{R_n} t \frac{dL}{d\alpha} dx = \psi'(\alpha) \Rightarrow \int_{R_n} t \frac{dL}{d\alpha} L dx = \psi'(\alpha)$$

$$\Rightarrow ET \cdot \frac{dL}{d\alpha} = \psi'(\alpha) \quad \dots (2)$$

ومن المعلوم لدينا أن:  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$Cov\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right) = E\left(T \cdot \frac{dL}{d\alpha}\right) - ET E\left(\frac{dL}{d\alpha}\right) =$$

$$E\left(T \cdot \frac{dL}{d\alpha}\right)$$

$$\rho\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right) = \frac{Cov\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right)}{\sqrt{VT} \cdot \sqrt{V\left(\frac{dL}{d\alpha}\right)}}$$

ولدينا أيضاً:

$$| \rho\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right) | \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{Cov\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right)}{\sqrt{VT} \cdot \sqrt{V\left(\frac{dL}{d\alpha}\right)}} \right| \leq 1$$

$$\frac{Cov^2\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right)}{V(T) V\left(\frac{dL}{d\alpha}\right)} \leq 1 \Rightarrow V(T) \geq \frac{Cov^2\left(T, \frac{dL}{d\alpha}\right)}{I_L}$$

مصادره مباشر



$$\Rightarrow V(T) \geq \frac{(\psi'(a))^2}{II} \quad \text{في حالة العادية} \quad V(+)\geq 0$$

$$V(T) \geq \frac{1}{II} \quad \text{في حالة انما صفة: } \psi a = a \quad \text{حيث}$$

نعتبر لدينا عيّناً عشوائياً طبيعياً  $X \sim N(5, \sigma^2)$  لنأخذ عيّنة عشوائية حجمها  $n$  وليكن:

متوسط العينة  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 5)^2$  عتداً نقطة الوسط  $\sigma^2$  في جدول في الجمع

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - 5}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n) \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = n \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} E T = n \Rightarrow E T = \sigma^2$$

$$V\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = 2n \Rightarrow \frac{n^2}{\sigma^4} V(T) = 2n \Rightarrow V(T) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$\rightarrow 0$   
 $n \rightarrow \infty$

آلة لوجود معلومات مشتركة ثم نوجد معلومات هذه المعلومات:

$$L = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-5)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-5)^2}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln L}{d \sigma^2} = 0 - \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-5)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{d^2 \ln L}{d(\sigma^2)^2} = + \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{\sum (x_i-5)^2}{(\sigma^2)^3}$$

نضرب بإشارة (-) مع ثم نوجد التوقع الرياضي:

$$E\left(-\frac{d^2 \ln L}{d \sigma^2}\right) = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{\sum E(x_i-5)^2}{(\sigma^2)^3}$$

$\sigma = \sigma^2$



(التوقع لـ  $(x_i - 5)$  هو التباين لـ  $x_i$ ) ملاحظة

$$= -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{n\sigma^2}{(\sigma^2)^3} = -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n}{\sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4} = \frac{1}{2\sigma^4} = \frac{1}{\bar{I}_L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{I}_L} = \frac{2\sigma^4}{n} = V(T)$$

أجب أن تحقق المساواة عند الحد الأدنى.. راجد

هنا يجب أن التباين أخصري وعاء أن المقدار أوعاء أن المقدار أخصري  
 مع. هنا يجب أن المقدار أخصري وتباين أخصري هو تباين أخصري رأس

مثال آخر: خذ أخصري بواسون ~~ملاحظة~~ وسيطه  $\lambda$  لتأخذ عند حد

مساوية  $\lambda$  المطلوب

(1) حيد المقدار ~~المطلوب~~ النقطة للوسط  $\lambda$ ؟ حيد سابقا  $\hat{\lambda} = \bar{x}$

(2) أثبت أن المقدار  $\lambda$  حيد أيضا أثبت أن حيد

(3) أثبت أن حيد؟ أثبت أن حيد  $\lambda$  حيد

$$V(T) = V(\bar{x}) = \frac{\lambda}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

u بين أن  $\hat{\lambda} = \bar{x}$  هو حيد حيد ذو تباين أخصري؟ حيد أو حيد

أثبت أن تباين أخصري

$$L = \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$$

$$\Rightarrow \ln L = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln L}{d \lambda} = -n + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \ln L}{d \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} \Rightarrow -\frac{d^2 \ln L}{d \lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow E\left(-\frac{d^2 \ln L}{d \lambda^2}\right) = \bar{I}_L = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$



$$\frac{1}{I_1} = \frac{\lambda}{n} = V(T) = V(\bar{x})$$

هذا يعني أن، لمعد، التخطي هو مقدار صغرت تباين تقدير  
الإحصاءات المرتبطة:

$$a < x < b$$

لفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً مجهولاً ذات ثابتة احتمالية  $f(x, \theta)$  حيث أن  $\theta$  هو المعسمة المجهول ولنا  $n$  من هذا المجتمع حيث عشوائية  $x_1, x_2, \dots, x_n$  حيث  $n$  عشوائية مرتبة الموافقة لهذه القيمة التي هي  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$  حيث  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

وسوف نتعرف على كيفية إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية  $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$  حيث  $y_1, y_2, \dots, y_n$  هي دالة الكثافة الاحتمالية المستقلة الاحتمالية المرتبة حيث:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i(y_i))$$

وبالمكاملات

(1-1) مرة مع كل واحد  $y_1, y_2, \dots, y_n$  حيث  $y_1, y_2, \dots, y_n$  هي دالة الكثافة الاحتمالية للأحداث المتصلة والذي يأخذ الشكل:

$$g(y_k) = n C_{k-2}^{n-1} (F_x(y_k))^{k-1} (1 - F_x(y_k))^{n-k} f_x(y_k) \quad a < y_k < b$$

وهي حالات خاصة وإذا كانت  $k=1$  فنحن نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للأحداث المتصلة أي

$$k=1 \Rightarrow g(y_1) = n (1 - F_x(y_1))^{n-1} f_x(y_1)$$

$$k=n \Rightarrow g(y_n) = n (F_x(y_n))^{n-1} f_x(y_n) \quad a < y_n < b$$

مثال: افترض أن لدينا مجتمعاً إحصائياً مجهولاً ذات ثابتة احتمالية  $f(x, \theta)$  حيث  $\theta$  هو المعسمة المجهول ولنا  $n$  من هذا المجتمع حيث عشوائية  $x_1, x_2, \dots, x_n$  حيث  $n$  عشوائية مرتبة الموافقة لهذه القيمة التي هي  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$  حيث  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

افترض أن لدينا مجتمعاً إحصائياً مجهولاً ذات ثابتة احتمالية  $f(x, \theta)$  حيث  $\theta$  هو المعسمة المجهول ولنا  $n$  من هذا المجتمع حيث عشوائية  $x_1, x_2, \dots, x_n$  حيث  $n$  عشوائية مرتبة الموافقة لهذه القيمة التي هي  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$  حيث  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

1. عينة دالة الكثافة الاحتمالية للأحداث المرتبة الأصغر

2. عينة دالة الكثافة الاحتمالية للأحداث المرتبة الأعظم

3. عينة دالة الكثافة الاحتمالية للأحداث المرتبة  $x_3$



الحل: لدينا الدالة التوزيعية للمجتمع هي:  $F_X(x) = x^2 \quad 0 < x < 1$  وبالتالي حسب أن:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= 5(1 - F_X(y_1))^4 f_X(y_1) \quad 0 < y_1 < 1 \\ &= 5(1 - y_1^2)^4 \cdot 2y_1 \quad 0 < y_1 < 1 \\ &= 10 y_1 (1 - y_1^2)^4 \quad 0 < y_1 < 1 \end{aligned}$$

المرتبة  
الأصغر

$$\begin{aligned} g(y_5) &= 5(F_X(y_5))^4 f_X(y_5) \quad 0 < y_5 < 1 \\ &= 5 y_5^6 \cdot 2y_5 = 10 y_5^7 \quad 0 < y_5 < 1 \end{aligned}$$

المرتبة  
الأكبر

$$\begin{aligned} g(y_3) &= 5 C_2^4 (F_X(y_3))^2 (1 - F_X(y_3))^2 f_X(y_3) \quad 0 < y_3 < 1 \\ &= 5 \frac{4!}{2! 2!} (y_3^2)^2 (1 - y_3^2)^2 \cdot 2y_3 \quad 0 < y_3 < 1 \\ &= 60 y_3^5 (1 - y_3^2)^2 \quad 0 < y_3 < 1 \end{aligned}$$

تمرين: نفرض لدينا جميع امكانيات حروف بدالة الكلمات الاحتمالية  $f_X(x) = e^{-x} \quad x > 0$  ولتأخذ حيث عشوائية طبق  $n=5$  ولتكن  $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$  امكانيات المرتبة المتوافقة للمجموعة العشوائية المرتبة والمتطابقة:

- (1) عينة دالة الكلمات الاحتمالية للاحصاء المرتبة الأصغر  $y_1$  ؟
- (2) عينة دالة الكلمات الاحتمالية للاحصاء المرتبة الأعظم  $y_5$  ؟
- (3) عينة دالة الكلمات الاحتمالية للاحصاء المرتبة الأوسط  $y_3$  ؟

الحل: لدينا الدالة التوزيعية للمجتمع  $F_X(x) = 1 - e^{-x} \quad x > 0$

$$\begin{aligned} g(y_1) &= 5(1 - F_X(y_1))^4 f_X(y_1) \quad y_1 > 0 \\ &= 5(1 - (1 - e^{-y_1}))^4 e^{-y_1} \quad y_1 > 0 \\ &= 5(e^{-y_1})^4 \quad y_1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y_5) &= 5(F_X(y_5))^4 f_X(y_5) \quad y_5 > 0 \\ &= 5(1 - e^{-y_5})^4 e^{-y_5} \quad y_5 > 0 \\ &= 5 e^{-y_5} (1 - e^{-y_5})^4 \quad y_5 > 0 \end{aligned}$$



$$g(y_5) = 5 C_2^4 (F_x(y_5))^2 \cdot (1 - F_x(y_3))^2 f_x(y_5) \quad y_5 > 0$$

$$= 30 (1 - e^{-y_1})^2 (1 - (1 - e^{-y_5})) e^{-y_5} \quad y_5 > 0$$

و دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة :

نقدم أنه لدينا دالة الكثافة الاحتمالية ثنائي مشتركة  
إذا كانت جميع المصنوع معروف بدالة كثافة احتمالية

$$f(x, a) : a < x < b$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_{j+1} < x_j < \dots < x_n < b$$

بالاعتماد مع الاحتمالات الأخرى نشأت  $y_1, y_3$

$$g(y_1, y_3) = \frac{n!}{(i-1)! (j-i)! (n-j)!} (F_x(y_1))^{i-1}$$

$P_1$

$P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$$(F_x(y_j) - F_x(y_i))^{j-i-1} [1 - F_x(y_j)]^{n-j}$$

$P_2 \quad P_3$

$$f_x(y_i) f_y(y_j) ; a < y_i < y_5 < b$$

$$g(y_1, y_n) = \frac{n!}{0! (n-2)! 0!} (y_1)^0 (y_n - y_1)^{n-2} (1 - y_n)^0$$

$$= n(n-1) (y_n - y_1)^{n-2} \quad 0 < y_1 < y_n < 1$$

$$= 20 (y_5 - y_1)^3 ; \quad 0 < y_1 < y_5 < 1$$

نريد الجواب